APPLICAZIONI:

INTEGRALI GENERALIZZATI O IMPROPRI E APPLICAZIONI ALLA PROBABILITÀ E STATISTICA

L'integrale alla Riemann (o integrale definito) viene definito per funzioni <u>LIMITATE</u> $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ definite in un intervallo $[a,b]\subset\mathbb{R}$ CHIUSO E <u>LIMITATO</u>.

Tuttavia, in diverse applicazioni (in particolare in Probabilità e Statistica) è opportuno definire un tipo di integrale per funzioni illimitate in prossimità di un punto o di un numero finito di punti e definite in intervalli limitati, oppure per funzioni definite in una semiretta o in tutto $\mathbb{R}$. Ad esempio, un'idea può essere quella di considerare una funzione illimitata in prossimità di un punto "cattivo", che sia integrabile alla Riemann (e quindi anche limitata) in ogni intervallo che non contiene il punto "cattivo" e di fare il <u>limite</u> dell'<u>integrale</u> alla Riemann quando "tendiamo ad avvicinarci" al punto "cattivo". Ad esempio, sia $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f(t)=\frac{1}{\sqrt{t}}$ per $t\in]0,1]$, $f(0)=0$. Notiamo che f è integrabile alla Riemann in ogni intervallo del tipo $[x,1]$ con $0<x<1$, ed è <u>illimitata</u> in prossimità del punto 0 (tende a $+\infty$, perché $\frac{1}{0^+}=+\infty$) $(\sqrt{0}=0)$.

Diremo allora che f è <u>integrabile in senso generalizzato</u> o <u>(G)-integrabile</u> in $[0,1]$ se esiste <u>in $\mathbb{R}$</u> il limite $l=\lim_{x\to0^+}\int_x^1 f(t)\,dt$. Se non esiste, oppure $l=+\infty$ o $-\infty$, allora f <u>NON È</u> (G)-integrabile in $[0,1]$.

Nel nostro caso si ha

$$\ell = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}}\,dt = \lim_{x\to 0^+} \int_x^1 \frac{1}{\sqrt{t}}\,dt = \lim_{x\to 0^+} \int_x^1 \frac{1}{t^{1/2}}\,dt = \lim_{x\to 0^+} \int_x^1 t^{-\frac{1}{2}}\,dt =$$

(Applichiamo la Formula Fondamentale del Calcolo Integrale)

$$= \lim_{x\to 0^+} \left[\frac{t^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}\right]_x^1 = \lim_{x\to 0^+} \left[\frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right]_x^1 = \lim_{x\to 0^+} \left[2t^{\frac{1}{2}}\right]_x^1 =$$

$$= \lim_{x\to 0^+} (2 - 2\underset{\downarrow 0}{x^{\frac{1}{2}}}) = \lim_{x\to 0^+} (2 - 2\sqrt{x}) = 2.$$ Siccome 2 è un numero reale, allora la funzione $f(t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{t}} & \text{per } t \in]0,1] \\ 0 & \text{per } t = 0 \end{cases}$ **è** (G)-integrabile in $[0,1]$.

Analogamente, per funzioni f definite in una semiretta del tipo $[a,+\infty[$ (oppure $]-\infty, b]$) e integrabili alla Riemann in ogni intervallo (chiuso e) limitato contenuto nel dominio di definizione di f, si prenderà il limite

$$\lim_{x\to+\infty} \int_a^x f(t)\,dt \qquad \left(\lim_{x\to-\infty} \int_x^b f(t)\,dt\right).$$ Se questo limite esiste <u>in $\mathbb{R}$</u>, allora diremo che f è <u>integrabile in senso generalizzato</u> (o <u>impropio</u>), o (G)-integrabile, in $[a,+\infty[$ ($]-\infty, b]$); se invece non esiste, oppure è $+\infty$ o $-\infty$, allora f <u>non è</u> (G)-integrabile in $[a,+\infty[$ ($]-\infty, b]$).

−3−

Esempio: Sia $f: [1, +\infty[\to \mathbb{R}$, $f(t) = \frac{1}{t^2}$. Si ha:

$$\int_1^{+\infty} f(t)\,dt = \lim_{x \to +\infty} \int_1^{x} f(t)\,dt = \lim_{x \to +\infty} \int_1^{x} \frac{1}{t^2}\,dt =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \int_1^{x} t^{-2}\,dt = \lim_{x \to +\infty} \left[\frac{t^{-2+1}}{-2+1}\right]_1^{x}$$ (qui si usa la Formula Fondamentale del Calcolo Integrale) $$= \lim_{x \to +\infty} \left[\frac{t^{-1}}{-1}\right]_1^{x} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left[-\frac{1}{t}\right]_1^{x} = \lim_{x \to +\infty} \left(-\frac{1}{x} + 1\right) = -\frac{1}{+\infty} + 1 = 0 + 1 = 1.$$

Siccome 1 è un numero <u>reale</u>, allora f è (G)integrabile in $[1, +\infty[$.

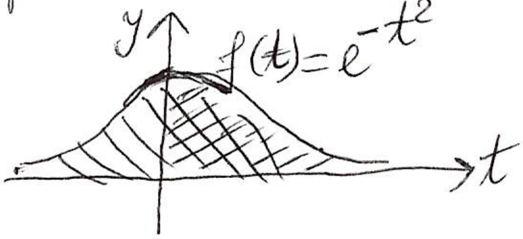
VENIAMO ORA ALLE APPLICAZIONI ALLA PROBABILITÀ E STATISTICA

- The probability integral
- Funzione Gamma (Γ) e generalizzazione del fattoriale
- Distribuzione normale o di Gauss (con esempio del tiro al bersaglio)

"THE PROBABILITY INTEGRAL"

ossia "L'INTEGRALE DELLA STATISTICA"

In Probabilità e Statistica e in tantissime applicazioni, riveste fondamentale importanza "THE PROBABILITY INTEGRAL", cioè



$$\boxed{I=\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt=\frac{\sqrt{\pi}}{2}}$$

$\left(\text{ove } \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt=\lim_{x\to+\infty}(R)\int_0^x e^{-t^2}\,dt\right)$, oppure, equivalentemente,

$$\boxed{K=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\,dt=\sqrt{\pi}} \quad \left(\text{ove } \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\,dt=\int_{-\infty}^{0} e^{-t^2}\,dt+\right.$$

$$\left.+\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt=\lim_{y\to-\infty}(R)\int_y^0 e^{-t^2}\,dt+\lim_{x\to+\infty}(R)\int_0^x e^{-t^2}\,dt\right)$$

Infatti, tenendo presente il significato geometrico dell'integrale, I è l'area della zona tratteggiata in ////, mentre K è l'area della zona tratteggiata in \\\\. Poiché il grafico della funzione $f(t)=e^{-t^2}$ è simmetrico rispetto all'asse y, allora si ha: $K=2I$, quindi da $I=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ si deduce

$$K=2\,\frac{\sqrt{\pi}}{2}=\sqrt{\pi}.$$

Osserviamo che

I e K non si possono calcolare con metodi cosiddetti "elementari", come neanche l'integrale indefinito $\int e^{-t^2}\,dt$: sappiamo che la funzione $t \mapsto e^{-t^2}$ ammette primitive in tutto $\mathbb{R}$, ma non le sappiamo calcolare - per l'appunto - in modo "elementare".

Allora vediamo un <u>trucco</u> per calcolare K, utilizzando <u>gli integrali doppi</u>, e facendo così <u>UN PROFONDO COLLEGAMENTO FRA GLI INTEGRALI GENERALIZZATI E GLI INTEGRALI DOPPI.</u>

L'<u>idea</u> è la seguente:

a) Esprimere K come la radice quadrata di un opportuno integrale doppio J.

b) Calcolare il valore di J, passando alle coordinate <u>polari</u>.

Quindi, partendo da $\boxed{K = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\,dt}$, definiamo

("a parte") l'integrale doppio J (naturalmente, è una cosa che possa richiamare K) e facciamo vedere che

$\boxed{J = K^2}$.

Poniamo per definizione

$$\boxed{J = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} \, dx\, dy}.$$

Naturalmente si può vedere che, con le coordinate cartesiane,
$\mathbb{R}^2 = \{(x,y) : -\infty < x < +\infty, \; -\infty < y < +\infty\}$
e che, dato che la nostra funzione integranda è sufficientemente "regolare", si può applicare anche in questo contesto la formula di riduzione dell'integrale doppio a due integrali semplici, soltanto che questa volta si considerano gli integrali generalizzati (o impropri) invece degli integrali definiti alla Riemann. Si ha:

$$\boxed{J} = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} \, dx\, dy = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)} \, dy =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2-y^2} \, dy \underset{\text{delle potenze}}{\overset{\text{(proprietà)}}{=}} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \cdot e^{-y^2} \, dy =$$

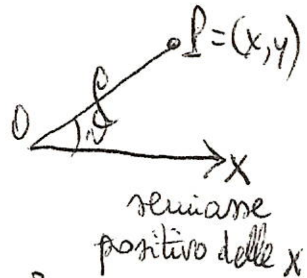
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt\right)^2 = \boxed{K^2}.$$

Dunque, $\boxed{J = K^2}$.

Ora calcoliamo il valore di J con le coordinate polari ($c'è \; x^2+y^2 \; \ldots$).

Osserviamo prima di tutto (e lo diamo per buono) che fare l'integrale su $\mathbb{R}^2$ è la stessa cosa che fare l'integrale su $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, cioè il risultato <u>non cambia</u>. Dunque, è: $J = \iint_{\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}} e^{-(x^2+y^2)}\, dx\, dy$

Ora notiamo che, se parametrizziamo $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ con le coordinate polari ρ e ϑ, ove $\begin{cases} x = \rho\cos\vartheta \\ y = \rho\sin\vartheta \end{cases}$,



$\rho = \overline{OP}$ si ha: $x^2+y^2=\rho^2$

$$\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} = \{(\rho,\vartheta)\in\mathbb{R}^2 : 0<\rho<+\infty,\ 0\le\vartheta\le 2\pi\}$$

Passando alle coordinate polari, e moltiplicando per il fattore "magico" ρ (che è lo Jacobiano della trasformazione $\begin{cases} x = \rho\cos\vartheta \\ y = \rho\sin\vartheta \end{cases}$), e applicando la formula di riduzione, si ha

$$\boxed{J} = \iint_{\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}} e^{-\rho^2}\cdot\rho\, d\rho\, d\vartheta = \int_0^{+\infty} d\rho \int_0^{2\pi} d\vartheta\cdot e^{-\rho^2}\cdot\rho = \int_0^{+\infty} \rho\cdot e^{-\rho^2} d\rho\cdot\int_0^{2\pi} d\vartheta =$$

$= \boxed{J_1\cdot J_2}$, ove $J_1 = \int_0^{+\infty} \rho\cdot e^{-\rho^2} d\rho$, $J_2 = \int_0$ [illegible]. Si ha:

$\boxed{J_2} = \int_0^{2\pi} 1\cdot d\vartheta = [\vartheta]_0^{2\pi} = 2\pi - 0 = \boxed{2\pi}$, per la Formula Fondamentale del Calcolo Integrale.

Adesso calcoliamo $J_1 = \int_0^{+\infty} \rho \cdot e^{-\rho^2} d\rho$. Prima di calcolare J_1, calcoliamo il corrispondente integrale indefinito $L_1 = \int \rho \cdot e^{-\rho^2} d\rho$.

Si tratta di un integrale indefinito del tipo "quasi immediato". Perché? Consideriamo il fattore ρ (che poi non è altro che il fattore "magico" dello Jacobiano): ρ non è la derivata di $-\rho^2$, ma "ci manca poco", nel senso che $D(-\rho^2) = -2\rho$. Allora, il "<u>trucco</u>" è moltiplicare e dividere per -2: moltiplichiamo per -2 <u>dentro</u> l'integrale (perché ci fa comodo, per avere -2ρ) e dividiamo per -2, cioè moltiplichiamo per $-\frac{1}{2}$, <u>fuori</u> dal segno di integrale. Si ha

$$L_1 = \int \rho \cdot e^{-\rho^2} d\rho = -\frac{1}{2} \int (-2\rho) \cdot e^{-\rho^2} d\rho = -\frac{1}{2} \int D\left(e^{-\rho^2}\right) d\rho =$$

$= -\frac{1}{2} \cdot e^{-\rho^2} + c$. Infatti, per il teorema di derivazione delle FUNZIONI <u>COMPOSTE</u>, è

$$D\left(e^{-\rho^2}\right) = \left(\begin{cases} D e^{w} = e^{w} \\ w = -\rho^2 \\ w'(\rho) = -2\rho \end{cases}\right) = e^{w} \cdot w'(\rho) = e^{-\rho^2} \cdot (-2\rho)$$

Quindi $\boxed{L_1 = \int \rho \cdot e^{-\rho^2} d\rho = -\frac{1}{2} \cdot e^{-\rho^2} + c}$.

Ora, per calcolare $\boxed{J_1 = \int_0^{+\infty} \rho e^{-\rho^2} d\rho}$, applichiamo la definizione di integrale generalizzato e la Formula Fondamentale del Calcolo Integrale. Si ha:

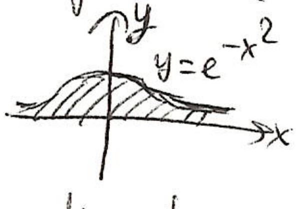
$$\boxed{J_1} = \lim_{x \to +\infty} \int_0^x \rho e^{-\rho^2} d\rho = \lim_{x \to +\infty} \left[-\frac{1}{2} \cdot e^{-\rho^2} \right]_0^x =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left(-\frac{1}{2} e^{-x^2} + \frac{1}{2} \underbrace{e^0}_{=1} \right) = -\frac{1}{2} \underbrace{e^{-\infty}}_{=0} + \frac{1}{2} = 0 + \frac{1}{2} = \boxed{\frac{1}{2}}.$$

Quindi si ottiene: $\boxed{J} = J_1 \cdot J_2 = \frac{1}{2} \cdot 2\pi = \boxed{\pi}$, cioè

$$J = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} dx\, dy = \pi. \quad \text{Ma } J = K^2,$$

$$K = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt$$ è una quantità positiva (Area ////)



e allora $\boxed{K = \sqrt{\pi}}$. Infine,

$$\boxed{I} = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{K}{2} = \boxed{\frac{\sqrt{\pi}}{2}}$$, come volevamo dimostrare.

P.S.: fare lo studio della funzione $f(x) = e^{-x^2}$ (quindi, ripassare lo studio di funzione!)

INTEGRALE DI e^{-x}

IMPORTANTISSIMO

$$I_7 \int e^{-x}\,dx = -e^{-x} + c$$

N.B.: Questo integrale può essere visto SIA COME INTEGRALE "QUASI IMMEDIATO", SIA COME INTEGRALE PER SOSTITUZIONE. (COLLEGAMENTO PROFONDO)

Vediamolo prima come integrale quasi immediato. La formula è

$$\boxed{\int \varphi'(w(x))\cdot w'(x)\,dx = \varphi(w(x)) + c = (\varphi \circ w)(x) + c}$$

L'integrale "quasi immediato" (di questo tipo) si fa quando c'è la MOLTIPLICAZIONE di un'espressione che contiene una certa funzione di w (ossia una funzione φ' di una funzione w) e la derivata w' della stessa funzione w.

Nel nostro caso, $e^{-x} = (e^{-x})\cdot 1$, ma la derivata di $w(x) = -x$ è -1. Allora, sia $\varphi'(w) = e^{w}$ (quindi si ha $\varphi(w) = e^{w}$), $w(x) = -x$; si fa il seguente TRUCCHETTO:

$$I_7 = -\int (-1)\cdot e^{-x}\,dx = -\int w'(x)\cdot e^{w(x)}\,dx = -\int \varphi'(w(x))\cdot w'(x)\,dx =$$

(formula) $-\varphi(w(x)) + c = \boxed{-e^{-x} + c}$, come si voleva dimostrare.

Otteniamo lo stesso risultato se si adopera l'integrazione per sostituzione. Ponendo $s = -x$, si ha $x = -s$, e quindi

$\boxed{I_7 = \int e^{-x}\,dx} = \int e^{s}\,d(-s) = \int e^{s}\cdot(-ds)$ (il differenziale ha le stesse proprietà della derivata, in particolare la costante moltiplicativa, nel nostro caso -1, può essere portata fuori dal segno di differenziale) $=$

$= -\int e^{s}\,ds$ (questa volta portiamo -1 fuori dal segno di integrale) $= -e^{s} + c$

$= \boxed{-e^{-x} + c}$ (a rigor di logica, sarebbe $-(e^{s} + c) = -e^{s} - c$, ma chiamare una costante (additiva), cioè un numero reale, c oppure $-c$ non cambia nulla). Questo risultato ha moltissime applicazioni nel calcolo degli integrali, e in particolare quando si calcola $\Gamma(1)$, ove Γ è la funzione GAMMA, utilissima in Probabilità e Statistica.

Ora definiamo la FUNZIONE GAMMA, molto utile e importante in Probabilità e Statistica, e vedremo che è una <u>generalizzazione del fattoriale</u>.

FATTORIALE $n!$, si legge "enne fattoriale"

Si definisce, per convenzione: $0! = 1$, $1! = 1$.

Se n è un <u>intero</u>, $n \geq 2$, si definisce FATTORIALE di n il PRODOTTO DEI primi n numeri interi positivi, cioè $2! = 1 \cdot 2 = 2$ $\quad 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$, $\boxed{4!} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = (1 \cdot 2 \cdot 3) \cdot 4 = \underbrace{6}_{=3!} \cdot 4 = \boxed{24}$, $5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4) \cdot 5 = \underbrace{24}_{(=4!)} \cdot 5 = 120$, ...,

$$\boxed{n!} = \underbrace{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (n-1)}_{\text{prodotto dei primi } n-1 \text{ numeri interi positivi}} \cdot n = \boxed{(n-1)! \cdot n}$$

$$\boxed{(n+1)!} = \underbrace{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot n}_{\text{prodotto dei primi } n \text{ numeri interi positivi}} \cdot (n+1) = \boxed{n! \cdot (n+1)}$$

Sussistono quindi le importantissime <u>FORMULE DI RICORRENZA</u> $\quad \boxed{n! = (n-1)! \cdot n} \quad \boxed{(n+1)! = n! \cdot (n+1)}$

usando le quali è possibile calcolare $n!$ conoscendo il valore di $(n-1)!$ e calcolare $(n+1)!$ conoscendo il valore di $n!$ Questo, in realtà, è quello che facciamo di fatto quando scriviamo $5! = (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4) \cdot 5 = 4! \cdot 5 = 24 \cdot 5 = 120$, perché partiamo dal fatto che <u>già conosciamo</u> il valore di $4!$ (che è 24), e poi ci ricaviamo il valore di $5!$

Definizione di FUNZIONE GAMMA.

Per ogni $t>0$, definiamo

$$\Gamma(t)=\int_0^{+\infty} x^{t-1}\cdot e^{-x}\,dx$$

dove l'integrale è inteso in senso generalizzato, cioè

$$\Gamma(t)=\lim_{y\to+\infty}\int_0^{y} x^{t-1}\cdot e^{-x}\,dx$$

Si può vedere che $\Gamma(t)$ è ben definito per ogni $t>0$, ma noi non facciamo la dimostrazione.

Ora facciamo vedere che la funzione Γ è una generalizzazione del fattoriale, usando le seguenti due proprietà:

a) $\Gamma(1)=1\ (=0!)$

b) (FORMULA DI RICORRENZA) $\boxed{\Gamma(t+1)=t\cdot\Gamma(t)}$ per ogni $t>0$

a) Si ha: $\boxed{\Gamma(1)}=\int_0^{+\infty} x^{1-1}\cdot e^{-x}\,dx=\int_0^{+\infty} \underbrace{x^0}_{=1}\cdot e^{-x}\,dx=\boxed{\int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx}$.

Teniamo conto del fatto che $\int e^{-x}\,dx=-e^{-x}+c$.

Per la Formula Fondamentale del Calcolo Integrale, si ha:

$$\boxed{\Gamma(1)}=\int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx=\lim_{y\to+\infty}\int_0^{y} e^{-x}\,dx=\lim_{y\to+\infty}\left[-e^{-x}\right]_0^{y}=$$

$$=\lim_{y\to+\infty}\left(-e^{-y}-(-e^{0})\right)=\lim_{y\to+\infty}\left(-e^{-y}+1\right)=\lim_{y\to+\infty}\left(-e^{-y}\right)+$$

$+\lim_{y\to+\infty}1$ (il limite della somma è uguale alla somma dei limiti, e il limite di una costante è uguale a quella costante stessa) $=-e^{-\infty}+1=$ $=0+1=\boxed{1}$ (perché $e^{-\infty}=0$, in quanto $\lim_{y\to-\infty}e^{y}=0$ (funzione esponenziale...). Pertanto a) è provato.

— 13 —

Dimostriamo ora

b) $\boxed{\Gamma(t+1) = t \cdot \Gamma(t)}$ per ogni $t > 0$.

Per ogni $t > 0$, si ha: $\Gamma(t+1) = \int_0^{+\infty} x^{t+1-1} \cdot e^{-x} \, dx$, in quanto $\Gamma(t) = \int_0^{+\infty} x^{t-1} \cdot e^{-x} \, dx$. (abbiamo messo $t+1$ al posto di t)

Ora calcoliamo intanto l'integrale indefinito $\int x^t \cdot e^{-x} \, dx$. Si tratta ~~dello~~ integrale di un prodotto, e quindi usiamo la formula di integrazione per parti. Prendiamo come fattore "facile da derivare" x^t, perché $D(x^t) = t \cdot x^{t-1}$ e cercheremo di ricondurci alla quantità $\Gamma(t)$, in quanto qui $t-1$ compare all'esponente. Prendiamo come fattore "facile da integrare" e^{-x}, in quanto sappiamo già che $\int e^{-x} dx = -e^{-x} + c$.

Quindi scriveremo $\int x^t \cdot e^{-x} \, dx = \int x^t \cdot (-e^{-x})' \, dx =$
$= \int f(x) \cdot g'(x) \, dx$ e applichiamo la formula di integrazione per parti

$$\int f(x) \cdot g'(x) \, dx = f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) \cdot g(x) \, dx$$

con $f(x) = x^t$, $f'(x) = t \cdot x^{t-1}$, $g(x) = -e^{-x}$, $g'(x) = e^{-x}$:

(△) $\int x^t \cdot e^{-x} \, dx = \int x^t \cdot (-e^{-x})' \, dx = -x^t \cdot e^{-x} - \int t x^{t-1} \cdot (-e^{-x}) \, dx =$
$= -x^t \cdot e^{-x} + t \int x^{t-1} e^{-x} \, dx$ (l'ultimo addendo, "integrato" fra 0 e $+\infty$, sarà proprio $t \cdot \Gamma(t)$; t è una costante moltiplicativa (perché è una quantità fissata che non dipende da x), e quindi è stata portata fuori dal segno di integrale). Ora, integrando (△) da 0 a $+\infty$ (procedendo similmente a quando si usa la Formula Fondamentale del Calcolo Integrale), si ha

$$\boxed{\Gamma(t+1)} = \int_0^{+\infty} x^t \cdot e^{-x} \, dx = \left[-x^t \cdot e^{-x}\right]_0^{+\infty} + t \cdot \int_0^{+\infty} x^{t-1} \cdot e^{-x} \, dx =$$
$$= 0 + t \cdot \Gamma(t) = \boxed{t \cdot \Gamma(t)},$$

purché dimostriamo che $\left[-x^t \cdot e^{-x}\right]_0^{+\infty} = 0$.
Ma che cosa vuol dire? Si ha:

$$\left[-x^t \cdot e^{-x}\right]_0^{+\infty} = \lim_{y \to +\infty} \left[-x^t \cdot e^{-x}\right]_0^y = \lim_{y \to +\infty} \left(-y^t \cdot e^{-y} - \underbrace{0^t \cdot e^0}_{=0}\right) = \lim_{y \to +\infty} \left(-y^t \cdot e^{-y}\right) = -(+\infty)^t \cdot e^{-\infty} =$$

$= (-\infty) \cdot 0$, in quanto $(+\infty)^{\text{esponente positivo}} = +\infty$, sappiamo che $t > 0$, ed inoltre $e^{-\infty} = \lim_{y \to -\infty} e^y = 0$ per le proprietà della funzione esponenziale. Dunque, $(-\infty) \cdot 0$ è una forma indeterminata, ma l'esponenziale è più veloce, quindi "vince" $e^{-\infty}$ che fa 0, e pertanto

$\left[-x^t \cdot e^{-x}\right]_0^{+\infty}$ viene ad essere uguale a 0, e dunque la formula di RICORRENZA b) di 1/2 pagine indietro è completamente dimostrata.

Ora, calcoliamo $\Gamma(2)$, $\Gamma(3)$, $\Gamma(4)$, ... tenendo conto che

a) $\Gamma(1) = 1$ $(= 0!)$

b) $\Gamma(t+1) = t \cdot \Gamma(t)$ per ogni $t > 0$ (RICORRENZA)

Iniziamo con $\Gamma(2)$. Si ha: $\Gamma(2) = \Gamma(1+1)$. La formula b) vale per ogni $t > 0$, quindi anche quando $t = 1$. Se nella b) ci mettiamo 1 al posto di t, si ottiene $\Gamma(1+1) = 1 \cdot \Gamma(1) = 1 \cdot 1 = 1$, in quanto già sappiamo che $\Gamma(1) = 1$. Dunque, $\boxed{\Gamma(2) = 1}$.

Ora, sapendo che $\boxed{\Gamma(2) = 1}$, calcoliamo $\Gamma(3)$, scrivendo $\boxed{3 = 2+1}$. La formula b) vale per ogni $t > 0$, quindi anche per $t = 2$. Sostituendo t con 2 nella b), si ottiene

$\boxed{\Gamma(3)} = \Gamma(2+1) = 2 \cdot \Gamma(2) = 2 \cdot 1$ (perché $\Gamma(2) = 1$) $= \boxed{2} = \boxed{2!} = 1 \cdot 2$

Dunque, $\boxed{\Gamma(3) = 2}$. Ora, sapendo questo, calcoliamo $\Gamma(4)$: $4 = \boxed{3} + 1$, e allora prenderemo $t = 3$ nella b). Sostituendo t con 3 nella b), si ha

$\boxed{\Gamma(4)} = \Gamma(3+1) = 3 \cdot \Gamma(3) = 3 \cdot 2 = 3 \cdot 2 \cdot 1 = \boxed{3!} = \boxed{6}$ (perché $\Gamma(3) = 2$).

Sapendo che $\Gamma(4) = 3!$, calcoliamo $\Gamma(5)$: $5 = 4+1$, e nella b) sostituiamo t con 4; si ha

$\boxed{\Gamma(5)} = \Gamma(4+1) = 4 \cdot \Gamma(4) = 4 \cdot 3! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = \boxed{4!} = 24$. Più in generale, si ha

$$\boxed{\Gamma(n) = (n-1)!} \qquad \boxed{\Gamma(n+1) = n!}$$

Ora ci proponiamo di definire il fattoriale, $t!$, per ogni $t>0$ (non necessariamente intero). Siccome abbiamo visto che $\boxed{n! = \Gamma(n+1)}$ per ogni intero positivo n (~~ed~~ anche per $n=0$), è naturale definire

(४) $\boxed{t! = \Gamma(t+1)}$ per ogni $t>0$:

questa sarà la definizione del fattoriale per ogni numero reale positivo t.

Ora vogliamo calcolare $\left(\frac{1}{2}\right)!$

Dalla definizione (४), $\left(\frac{1}{2}\right)! = \Gamma\left(\frac{1}{2}+1\right) = \Gamma\left(\frac{3}{2}\right)$

quindi bisognerebbe calcolare direttamente $\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)$. Siccome ciò può essere alquanto difficile da un punto di vista "tecnico", allora calcoliamo dapprima $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ (che si riconduce al "probability integral")

e poi applicheremo di nuovo la formula di ricorrenza

b) $\Gamma(t+1) = t\cdot\Gamma(t)$ questa volta usata con $t=\frac{1}{2}$

ottenendo $\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{1}{2}+1\right) = \frac{1}{2}\cdot\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$

una volta calcolato $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$. Ricordiamo che $\Gamma(t) = \int_0^{+\infty} x^{t-1}\cdot e^{-x}\,dx$

per ogni $t>0$. Sostituendo t con $\frac{1}{2}$, si ottiene

$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} x^{\frac{1}{2}-1}\cdot e^{-x}\,dx = \int_0^{+\infty} x^{-\frac{1}{2}}\cdot e^{-x}\,dx = \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^{1/2}}\cdot e^{-x}\,dx =$

(proprietà delle potenze) $= \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}\cdot e^{-x}\,dx$. Per sostituzione, poniamo $\boxed{\sqrt{x}=w}$.

Si ha: $x=w^2$, e ricordando la formula $\boxed{dx = \frac{dx}{dw}\,dw = x'(w)\,dw}$

e dato che $x'(w) = 2w$, si ha $\boxed{dx = 2w\cdot dw}$. Sostituendo, si ha:

$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\cancel{w}} e^{-w^2}\, 2\cancel{w}\,dw = 2\int_0^{+\infty} e^{-w^2}\,dw$ (la costante 2 si porta fuori dall'integrale)

$= \frac{2\cdot\sqrt{\pi}}{2} = \sqrt{\pi}$ (per il probability integral). Infine, $\boxed{\left(\frac{1}{2}\right)!} = \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}\cdot\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \boxed{\frac{\sqrt{\pi}}{2}}$.

Abbiamo calcolato $(1/2)!$

(N.B.: Nell' integrazione per sostituzione bisogna anche "sostituire" gli estremi rispetto alla variabile x con gli estremi rispetto alla variabile w. Ma, nel nostro caso, gli estremi NON si dovevano sostituire, perché sono sempre gli stessi!!! Siamo quindi davanti a un caso "fortunato": infatti x varia tra 0 e $+\infty$, ma $w=\sqrt{x}$, e quindi anche w varia tra 0 e $+\infty$.)

Veniamo ora alla $\boxed{\text{DISTRIBUZIONE NORMALE}}$ o GAUSSIANA, che introdurremo attraverso un esempio, che chiameremo "ESEMPIO DEL TIRO AL BERSAGLIO" oppure "DEL TIRO A SEGNO"

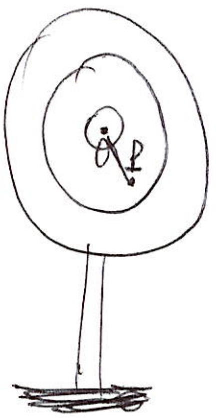
Diremo che una funzione f definita su tutto $\mathbb{R}$ e che assume valori non-negativi è una densità di probabilità se $\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = 1}$, ove con questo integrale si intende il (G)-integrale (cioè, in senso generalizzato), vale a dire, per definizione:

$$(G)\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = (G)\int_{-\infty}^{0} f(t)\,dt + (G)\int_{0}^{+\infty} f(t)\,dt = \lim_{y\to-\infty} (R)\int_{y}^{0} f(t)\,dt +$$

$$+ \lim_{x\to+\infty} (R)\int_{0}^{x} f(t)\,dt$$

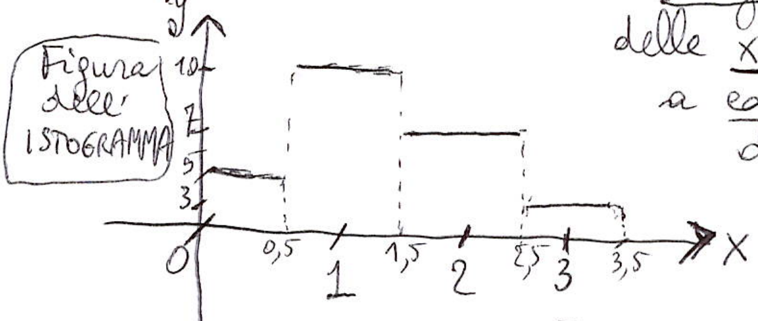
(ove il simbolo $(R)\int_a^b$ sta a indicare l'integrale alla Riemann, e il simbolo (G) prima dell'integrale indica l'integrale in senso generalizzato)

ESEMPIO DEL TIRO AL BERSAGLIO



Lanciamo una freccia (tiro a segno). La freccia si posiziona sul punto P. Facciamo diversi tiri. La quantità "casuale" da valutare, che si chiama VARIABILE ALEATORIA e si indica con X, è la distanza dal punto P dal centro del bersaglio O. Facendo tantissimi tiri, avremo tantissimi dati della distanza $\overline{OP}$. Ora RAGGRUPPIAMO i nostri dati in varie classi. Classe 0: $X=\overline{OP}$ varia (per esempio) da 0 a 0,5 cm (estremi inclusi). Classe 1: la distanza $\overline{OP}$ varia da 0,5 cm (escluso) a 1,5 cm (compreso), e quindi il punto 1 (cioè, diciamo, quel punto che corrisponde a 1 cm) è il "centro" della classe 1. Classe 2: la distanza $\overline{OP}$ varia da 1,5 cm (escluso) a 2,5 cm (compreso), e quindi 2 sarà il "centro" della classe 2.

Si costruisce così un istogramma, in cui sull'asse delle x si mettono le CLASSI associate a come si approssima la distanza $\overline{OP}$, e sull'asse delle y si mette il rapporto tra il NUMERO dei tiri in cui la distanza $\overline{OP}$ è in quella classe considerata e il NUMERO TOTALE dei tiri.



Questo rapporto si chiama FREQUENZA RELATIVA della classe considerata, e il numero dei tiri per i quali la distanza $\overline{OP}$ è nella classe si chiama FREQUENZA ASSOLUTA della classe.

Esempio: Facciamo 25 tiri (n = numero totale di tiri = 25)
Supponiamo che, in tutti questi tiri, la distanza $\overline{OP}$ della freccia dal centro del bersaglio sia inferiore a 3,5 cm e che abbiamo avuto:

5 tiri tali che $\overline{OP}$ sia nella classe 0
10 tiri " " nella classe 1
7 tiri " " nella classe 2
3 tiri " " nella classe 3

Le quantità "numero di tiri con cui $\overline{OP}$ è nella classe 0, 1, 2, 3" sono le FREQUENZE ASSOLUTE delle classi 0, 1, 2, 3 e la loro somma è 25, cioè n, ossia il NUMERO TOTALE DEI TIRI. Le quantità

$\frac{5}{25} = \frac{1}{5}$ (cioè $\frac{5}{n}$), $\frac{10}{25} = \frac{2}{5}$ (cioè $\frac{10}{n}$), $\frac{7}{25}$ (cioè $\frac{7}{n}$), $\frac{3}{25}$ (cioè $\frac{3}{n}$), si chiamano FREQUENZE RELATIVE, E LA LORO SOMMA FA 1 $\left(= \frac{25}{25}\right)$. Si preferisce indicare sull'asse delle y le frequenze relative proprio perché LA SOMMA DELLE FREQUENZE RELATIVE È SEMPRE UGUALE AD 1. Notiamo che le frequenze relative delle classi sono le probabilità che la freccia finisca in un punto P tale che la distanza $\overline{OP}$ sia in quella classe: infatti la probabilità (per definizione) di una classe è uguale al rapporto $\frac{\text{numero dei casi "favorevoli a quella classe"}}{\text{numero di tutti i casi possibili}} =$

$= \frac{\text{numero dei tiri tali che la distanza OP è in quella classe}}{\text{numero totale dei tiri}} =$

$=$ frequenza RELATIVA di quella classe.

Questo è un IMPORTANTISSIMO ~~CO~~ COLLEGAMENTO PROFONDO FRA LA PROBABILITÀ E LA FREQUENZA RELATIVA.

Quindi, il nostro istogramma è un'approssimazione della rappresentazione del fenomeno che descrive, in un certo senso, "quanti" tiri sono tali che la distanza $\overline{OP}$ (dal centro O del punto P in cui va a finire la freccia abbia un determinato valore. L'approssimazione della distanza $\overline{OP}$ è data dalla corrispondente classe.

Consideriamo la quantità n (numero totale dei tiri) sempre più grande (quindi FACCIAMO TENDERE IL NUMERO TOTALE DEI TIRI A $+\infty$).

Per avere un'approssimazione sempre più precisa della descrizione del fenomeno (che dovrebbe indicare il rapporto tra il numero dei tiri in cui la corrispondente distanza $\overline{OP}$ abbia un ben determinato valore ed il numero totale dei tiri), DIMINUIAMO L'AMPIEZZA DELLE CLASSI. Per esempio: Invece di "approssimare" $\overline{OP}$ con $0, 1, 2, 3, \ldots$, si può "approssimare" la distanza $\overline{OP}$ con $0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, 3, \ldots$

(quindi, ad esempio: classe 0: da 0 a $\frac{1}{4}$ compreso

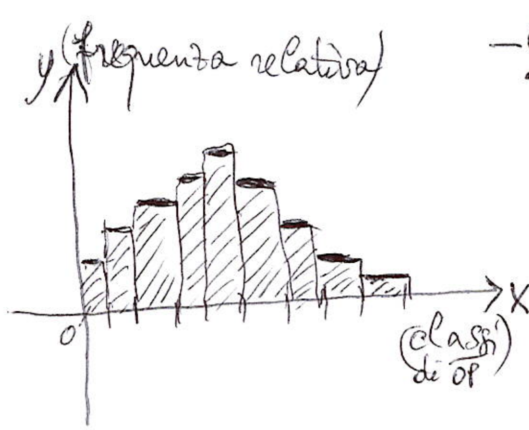
classe $\frac{1}{2}$: da $\frac{1}{4}$ escluso a $\frac{3}{4}$ compreso

classe 1: da $\frac{3}{4}$ escluso a $\frac{5}{4}$ compreso

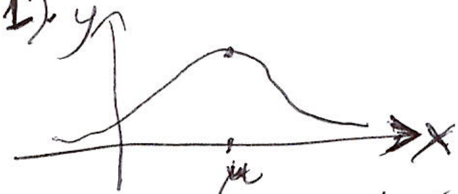
classe $\frac{3}{2}$: da $\frac{5}{4}$ escluso a $\frac{7}{4}$ compreso

classe 2: da $\frac{7}{4}$ escluso a $\frac{9}{4}$ compreso)

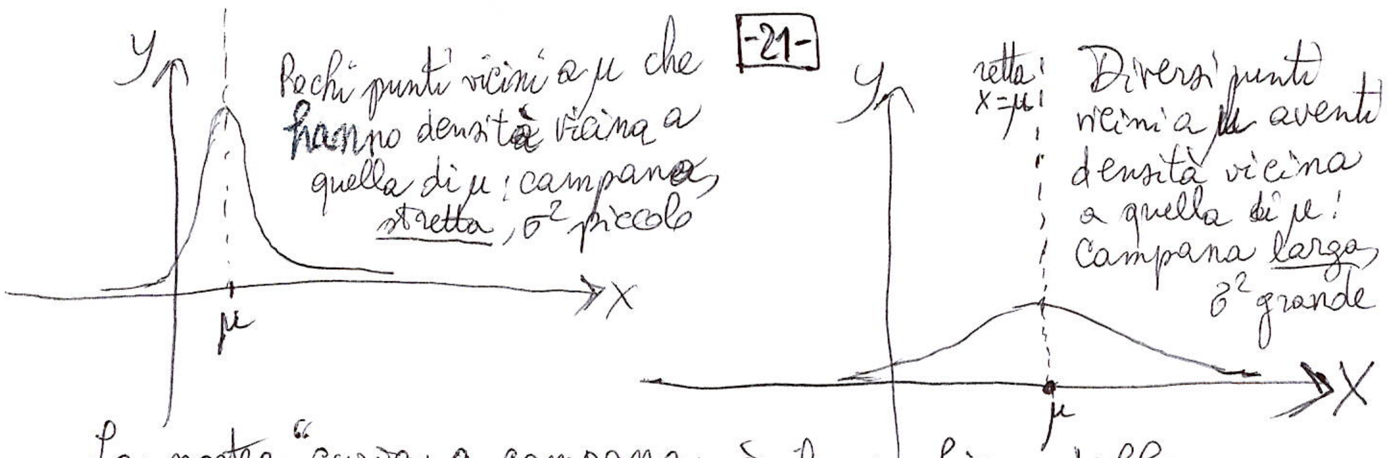
e poi, successivamente, "approssimare" $\overline{OP}$ con $0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1, \frac{5}{4}, \frac{3}{2}, \frac{7}{4}, 2, \ldots$ in modo tale da avere una descrizione sempre più precisa del fenomeno dell'andamento dei tiri.



Facciamo tendere a 0 l'"ampiezza delle classi", cioè facciamo tendere a $+\infty$ il "numero delle classi", cioè il numero delle "approssimazioni" della distanza $\overline{OP}$. Si ottiene quindi un istogramma che descrive con sempre maggiore precisione l'andamento dei tiri. All'istogramma considerato è associata la funzione "a scalini", che rappresenta l'andamento delle frequenze relative corrispondenti alle varie classi: è una funzione non-negativa o positiva, a cui è associata la somma delle aree dei corrispondenti rettangolini. Che cosa si ottiene al limite? Se la distanza $\overline{OP}$ varia all'interno di un intervallo limitato, diciamo $[0,b]$, si ottiene "il limite delle somme delle aree dei rettangolini". Ma questo che cos'è? L'abbiamo studiato all'inizio di questa dispensa: SI OTTIENE L'INTEGRALE ALLA RIEMANN (!!!) Di che cosa? Della funzione densità di probabilità (che vedremo con un esempio avere integrale 1, e che ha sempre integrale 1 perché LA SOMMA DELLE FREQUENZE RELATIVE È 1). PERCHÉ? Perché, "al limite", la funzione "a scalini" rappresentata dall'istogramma tende ad essere



una funzione a forma di curva a campana (questo è per così dire un risultato "empirico", "sperimentale", che in Statistica si chiama TEOREMA DEL LIMITE CENTRALE) (senza dim.): questa funzione a forma di campana è la funzione densità di probabilità $f(t)$, non negativa e tale che $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, dt = 1$. N.B.: Siccome $\overline{OP}$ può avere (teoricamente) valori "vicini" a $+\infty$, allora in Statistica si prende L'INTEGRALE GENERALIZZATO invece di quello alla Riemann; ma sostanzialmente, nel "passaggio al limite" delle somme delle aree dei rettangolini, l'integrale generalizzato si comporta analogamente come quello alla Riemann.



La nostra "curva a campana" è il grafico della funzione densità di probabilità $f(t)$. Nel caso di CURVA A CAMPANA, la nostra curva (o la nostra densità) si chiama DISTRIBUZIONE NORMALE, o GAUSSIANA o DI GAUSS ed è caratterizzata da due parametri (μ, σ^2): μ si chiama "media" oppure "valor medio", e indica il punto di massimo (assoluto) della funzione densità, cioè il punto in corrispondenza del quale abbiamo frequenze maggiori dei nostri dati, cioè dei valori assunti dalla nostra variabile aleatoria X (che nel nostro esempio è la distanza $\overline{OP}$ della freccia dal centro del bersaglio). Notiamo che il grafico della nostra funzione densità è simmetrico rispetto alla retta verticale $x=\mu$. Il parametro σ^2 si chiama "varianza", mentre il parametro $\sigma=\sqrt{\sigma^2}$ (prendendo il valore positivo della radice quadrata) si chiama scarto quadratico medio oppure deviazione standard. La varianza esprime, in un certo senso, la "dispersione" dei valori della nostra densità rispetto al valore della densità corrispondente al valor medio μ, cioè esprime quanto è possibile trovare (sull'asse delle x) dei punti abbastanza lontani da μ che abbiano comunque densità vicino a quella di μ [ossia, detto in un modo molto semplicistico, "quanto ci si allontana dal valor medio μ"]. Nelle due figure all'inizio di questa pagina si vede che, quando σ^2 è molto piccolo, si ha la "campana stretta", mentre quando σ^2 è molto grande, si ha la "campana larga". Quindi σ^2 indica, in un certo senso, l'"ampiezza della campana".

Si parlerà quindi di DISTRIBUZIONE NORMALE o GAUSSIANA o DI GAUSS di parametri μ, σ^2, che si indica con il simbolo $\boxed{\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)}$.

Nella distribuzione normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, la funzione densità f è data da

$$f(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Nel caso particolare $\mathcal{N}(0,1)$ (che è molto studiato in letteratura e i cui valori sono "tabulati", cioè sono presenti in apposite tabelle), la funzione densità f è data da

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{t^2}{2}}$$

(basta mettere 0 al posto di μ ed 1 al posto di σ^2, oppure 1 al posto di σ, il che è la stessa cosa).

Nella prossima pagina dimostriamo che $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, dt = 1$, per semplicità lo facciamo solamente nel caso particolare $\mu = 0$ e $\sigma^2 = 1$.

Ora consideriamo la densità che corrisponde alla distribuzione normale $\mathcal{N}(0,1)$:

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}$$ e dimostriamo che

$$\boxed{I = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, dt = 1}$$, cioè che f è <u>veramente</u> una funzione <u>densità</u>.

Vogliamo ricondurci al "probability integral"

$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-w^2} dw$ e quindi vogliamo fare una sostituzione in modo tale che al posto di $-\frac{t^2}{2}$ ci sia $-w^2$.

Deve essere quindi $-\frac{t^2}{2} = -w^2$, cioè $\frac{t^2}{2} = w^2$. Poniamo allora $\boxed{w = \frac{t}{\sqrt{2}}}$. Notiamo che, siccome t varia tra $-\infty$ e $+\infty$, allora anche w varia tra $-\infty$ e $+\infty$. Adesso dobbiamo sostituire dt con un'espressione che comprende <u>solamente</u> dw e termini contenenti solo la w, ma non la t. Si ha:

$t = w \cdot \sqrt{2}$, $\boxed{dt} = \frac{dt}{dw} \cdot dw = \boxed{t'(w) \cdot dw} = \sqrt{2}\, dw$, e quindi

$t'(w) = \sqrt{2}$,

$$\boxed{I} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\cancel{\sqrt{2}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-w^2} \cdot \cancel{\sqrt{2}}\, dw =$$

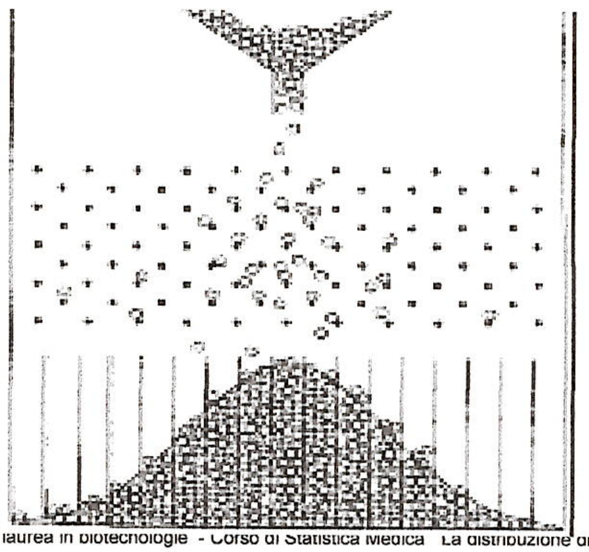
$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-w^2} dw =$$ (in virtù del "PROBABILITY INTEGRAL")

$$= \frac{1}{\cancel{\sqrt{\pi}}} \cdot \cancel{\sqrt{\pi}} = \boxed{1}$$, come si voleva dimostrare.

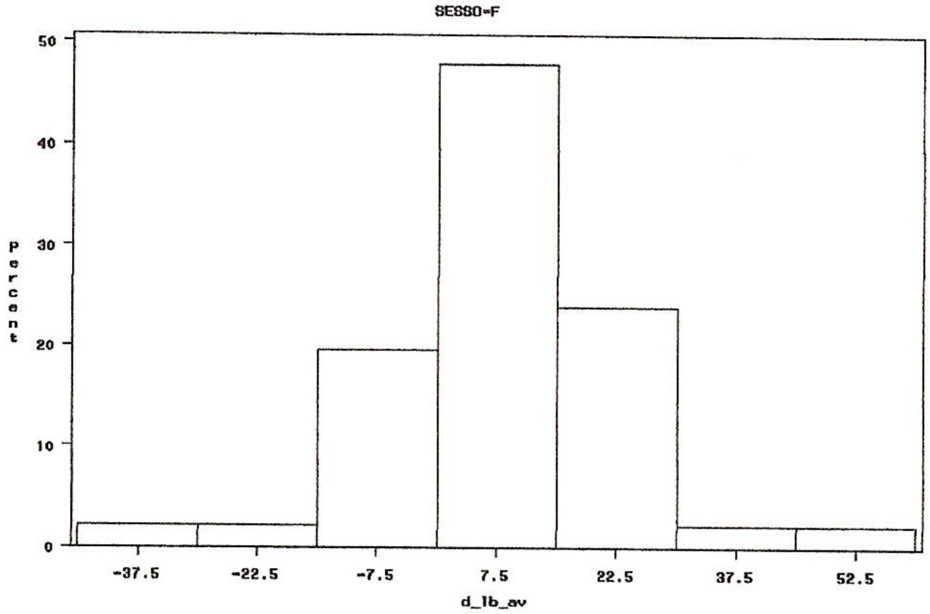
24 - "SCHEDA:"

La distribuzione Gaussiana o normale

- È la distribuzione di probabilità che meglio rappresenta molte variabili biologiche
- E' la distribuzione di probabilità degli errori casuali
- E' la distribuzione di probabilità delle statistiche campionarie
- E' la distribuzione limite per altre distribuzioni di probabilità quando n $\rightarrow\infty$



Distribuzione delle differenze tra glicemia misurata al polpastrello ed all'avambraccio



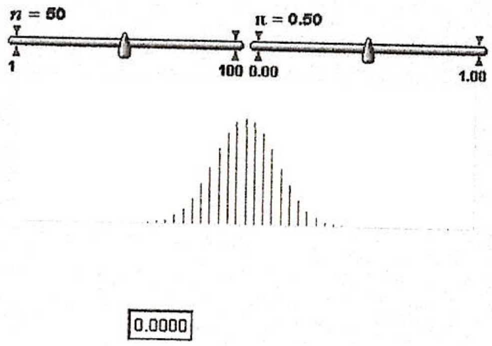
La distribuzione Gaussiana

- È la distribuzione di probabilità che meglio rappresenta molte variabili biologiche
- E' la distribuzione di probabilità degli errori casuali
- E' la distribuzione di probabilità delle statistiche campionarie
- E' la distribuzione limite per altre distribuzioni di probabilità quando n $\rightarrow\infty$

- 26 -

About th
0. Prefac
1. Introd
2. Displa
3. Bivari
4. Time S
5. Categ
6. Sampl
1 Pop
2 Infin
3 Prob
4 Vari
5 Distr
6 Norm
7 Distr
8 Sam
7. Design
8. Estim
9. Testin
10. Comp
11. Regre
12. Indep
13. Analy
Index
Datasets

Shape of the binomial distribution



Observe that

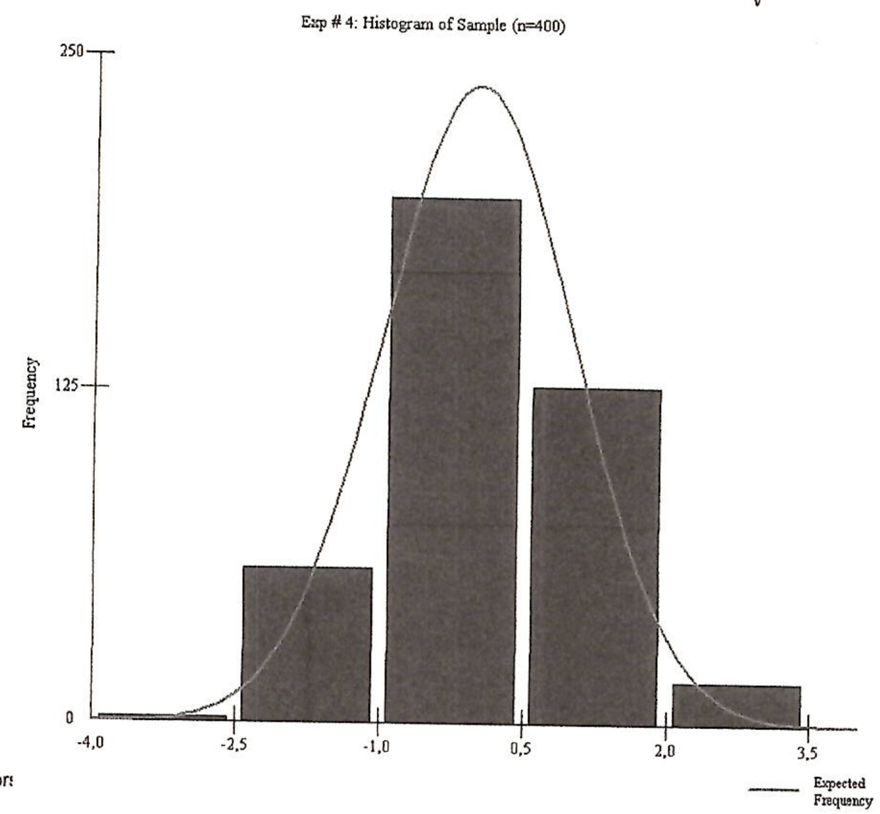
The distribution of P is centred on π.

The spread decreases as n increases.

It is symmetric when $\pi = 0.5$, but becomes more skew as π approaches 0 or 1.

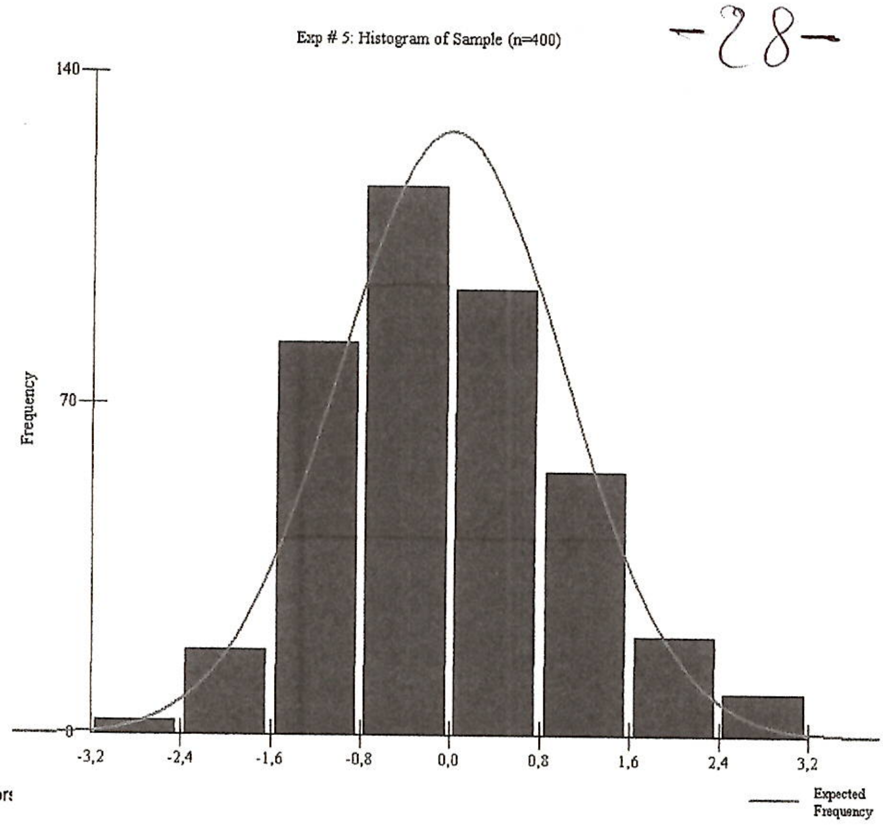
- La distribuzione gaussiana come modello di una distribuzione di probabilità empirica

- Es. istogramma che descrive la distribuzione di frequenza di una variabile numerica in un gruppo di 400 soggetti:



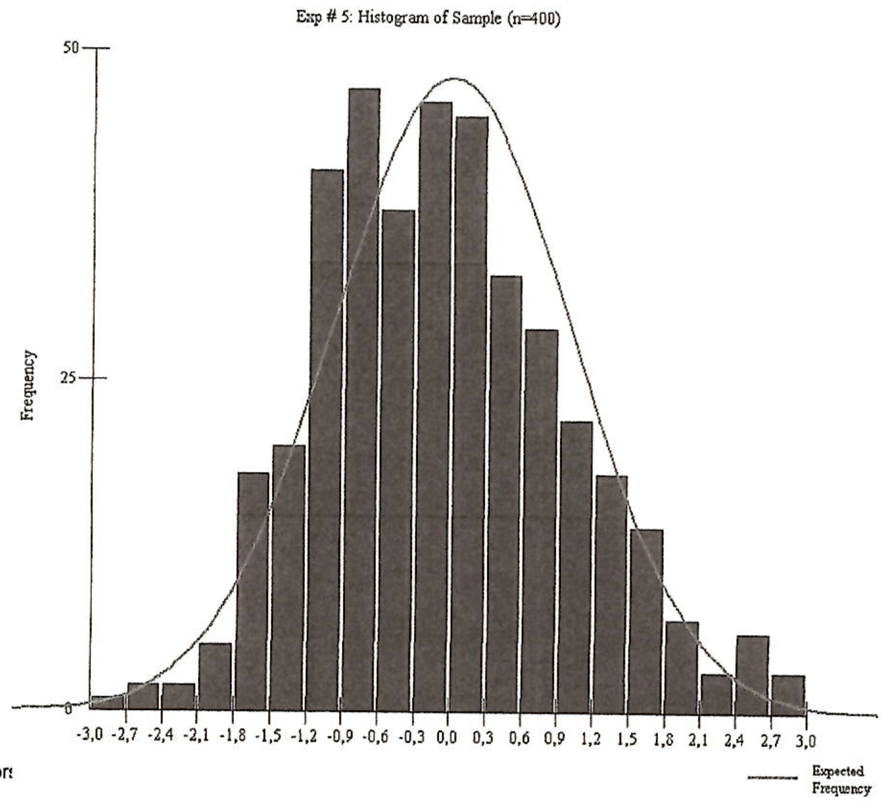
Cor

• Aumento progressivamente la suddivisione dell'istogramma:


Exp # 5: Histogram of Sample (n=400)
140
70
0
Frequency
-3,2 -2,4 -1,6 -0,8 0,0 0,8 1,6 2,4 3,2
Expected Frequency

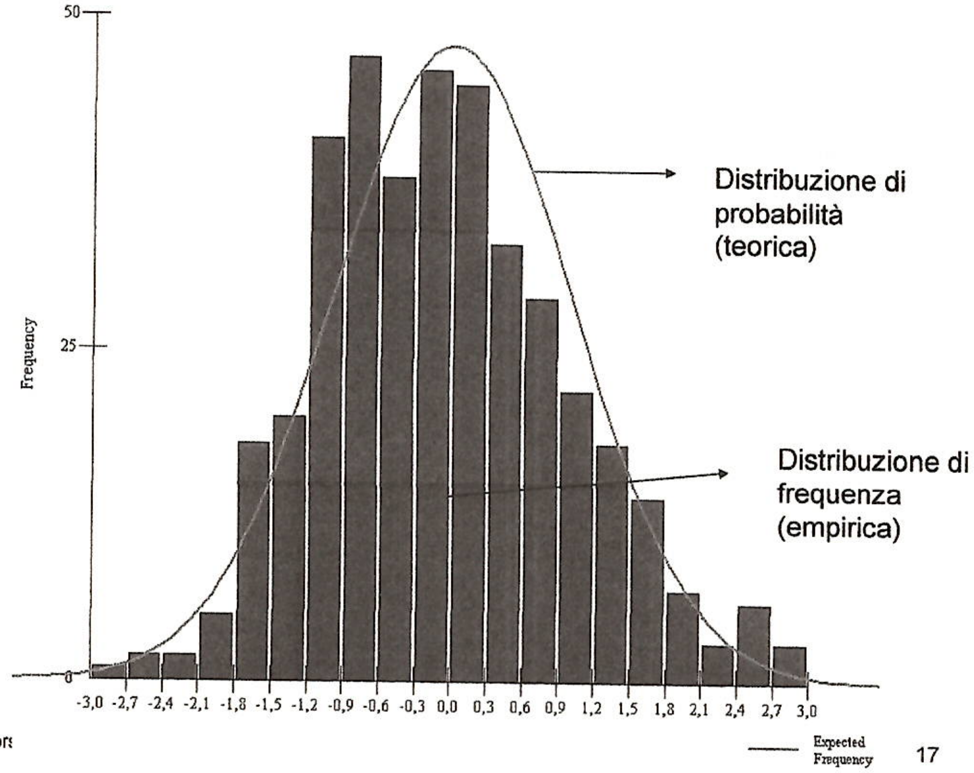
Cor

15

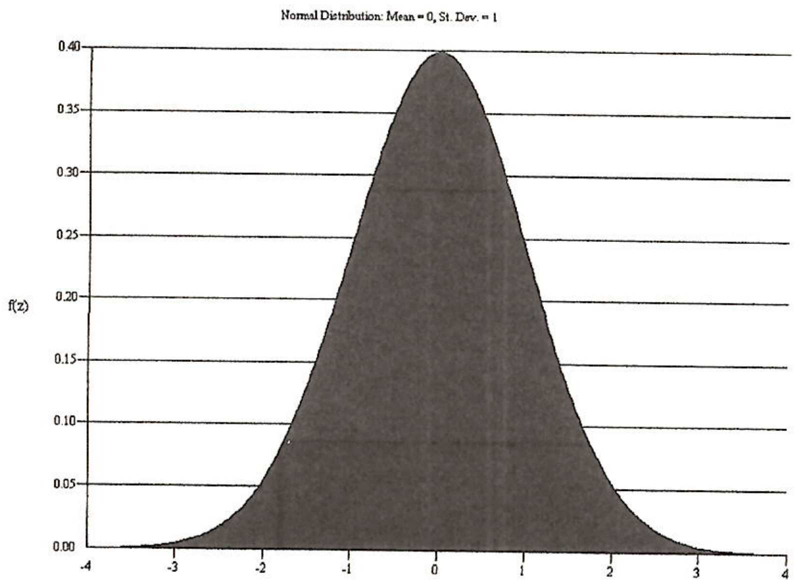

Exp # 5: Histogram of Sample (n=400)
50
25
0
Frequency
-3,0 -2,7 -2,4 -2,1 -1,8 -1,5 -1,2 -0,9 -0,6 -0,3 0,0 0,3 0,6 0,9 1,2 1,5 1,8 2,1 2,4 2,7 3,0
Expected Frequency

Cor

16



La forma della distribuzione di probabilità normale



La formula della distribuzione normale.

E' definita da Media (μ) e Deviazione Standard (σ)

$$f(x) = \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right) * \exp\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}$$

La distribuzione gaussiana o "normale" comprende una famiglia di curve, i cui parametri sono Media (μ) e Deviazione Standard (σ)

Media (μ): posizione centrale

Deviazione Standard (σ): 'ampiezza' della curva

Il grafico seguente mostra due curve normali con DS=1 (curva stretta ~~nera~~) e DS=2 (c. campana larga ~~rossa~~). Entrambe hanno media=0.